INESTABILITAT PREDICTIVA DEL PARÀMETRE NAO DE LA CIRCULACIÓ ATMOSFÈRICA A PARTIR DE TÈCNIQUES FRACTALS

Xavier Lana

Membre del Grup de Recerca *Geofísica i Enginyeria Sísmica (GIES)*

INDEX NAO:
DIFERÈNCIA NORMALITZADA ENTRE PRESSIONS ATMOSFÈRIQUES A NIVELL DEL MAR (SLP) MESURADES A PONTA DELGADA (AÇORES) I AKUREYRI (ISLANDIA)

FONT DE LES DADES:
CLIMATE RESEARCH UNIT – UNIVERSITY of EAST ANGLIA, UK
http://www.cru-uea.ac.uk

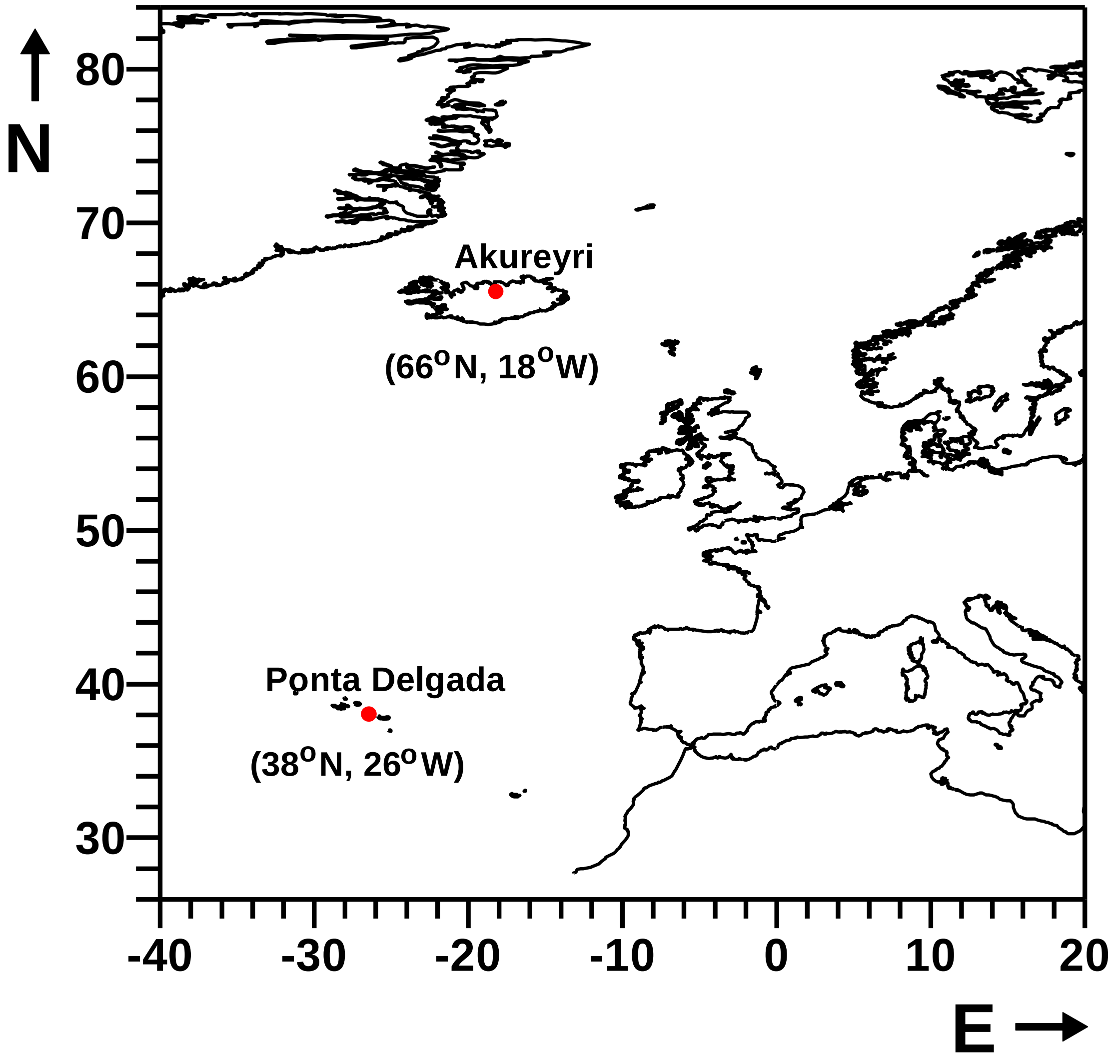
CARACTERÍSTIQUES MÉS DESTACABLES:

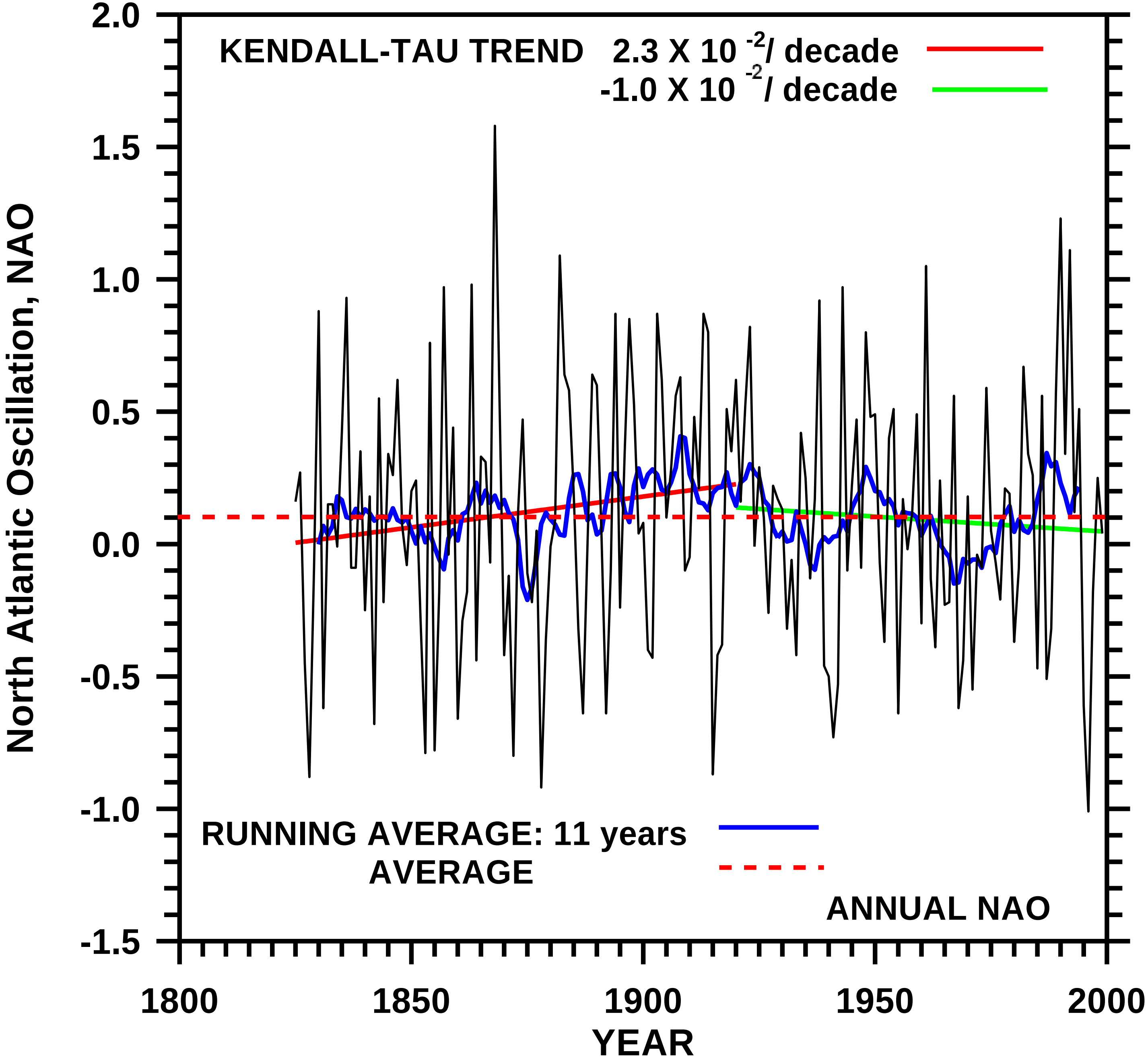
1) **TENDÈNCIES TEMPORALS ESTADÍSTICAMENT SIGNIFICATIVES**
2) **FLUCTUACIONS CONSIDERABLES**
3) **PERIODICITATS VARIABLES (2-5 ANYS)**
4) **CORRELACIÓ ENTRE VALORS DE LA NAO I CARACTERÍSTIQUES HIVERNALS (règim tèrmic i pluviomètric) A EUROPA OCCIDENTAL (*)**

(*) Excepcions: franges del Mediterrani Occidental

OBJECTIU:
ANALITZAR LA PREDICTIBILITAT DE L'ÍNDEX NAO
(escales mensual / anual)

http://www.cru.uea.ac.uk
(1825-2007)




KENDALL-TAU TREND 2.3 X 10 -2 / decade
-1.0 X 10 -2 / decade
North Atlantic Oscillation, NAO
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
-1.5
RUNNING AVERAGE: 11 years
AVERAGE
ANNUAL NAO
1800
1850
1900
1950
2000
YEAR

ELEMENTS D'ANÀLISI FRACTAL

1) LACUNARITY – MODEL DE CANTOR

2) ANÀLISI RESCALADA DE HURST

3) TEOREMA DE RECONSTRUCCIÓ

- **3.1) INTEGRAL DE CORRELACIÓ**
  - **Dimensió de correlació**
  - ***Embedding dimension***
  - **Entropia de Kolmogorov**
- **3.2) INESTABILITAT PREDICTIVA**
  - **Exponents de Lyapunov**
  - **Models estocàstics de pronòstic**

1) LACUNARITY

$$N(r) = r_t - r + 1$$

$$p(s,r) = \frac{n(s,r)}{N(r)}\ ; \quad M_1(r) = \sum_{s=1}^{r} s\,p(s,r)\ ; \quad M_2(r) = \sum_{s=1}^{r} s^2 p(s,r)$$

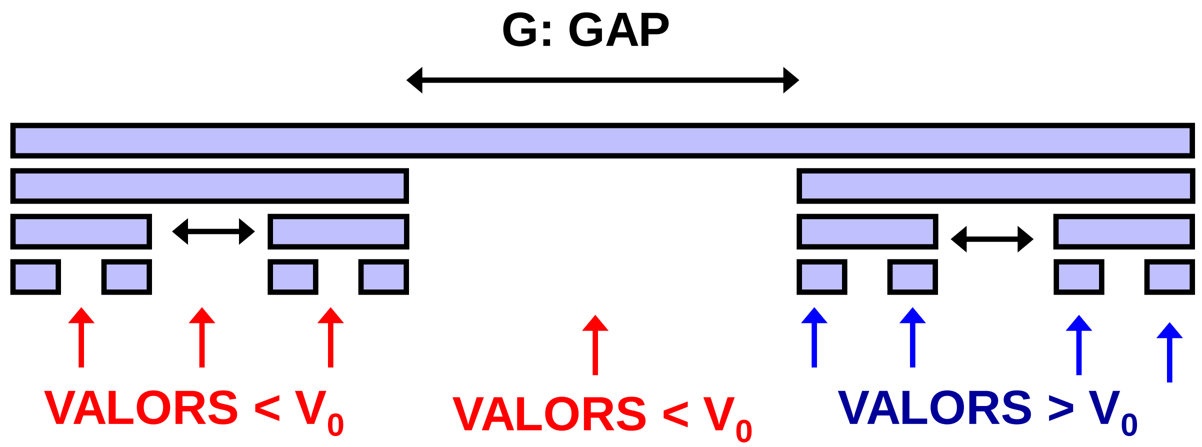
$$L(r) = \frac{M_2(r)}{\{M_1(r)\}^2}\ ; \quad L(r \to \infty) = 1.0$$

r_t : Nombre total d'elements analitzats

N(r) : Nombre de possibles finestres mòbils amb r elements

n(s,r) : Nombre de finestres d'amplada r amb s elements superant valor llindar V_0

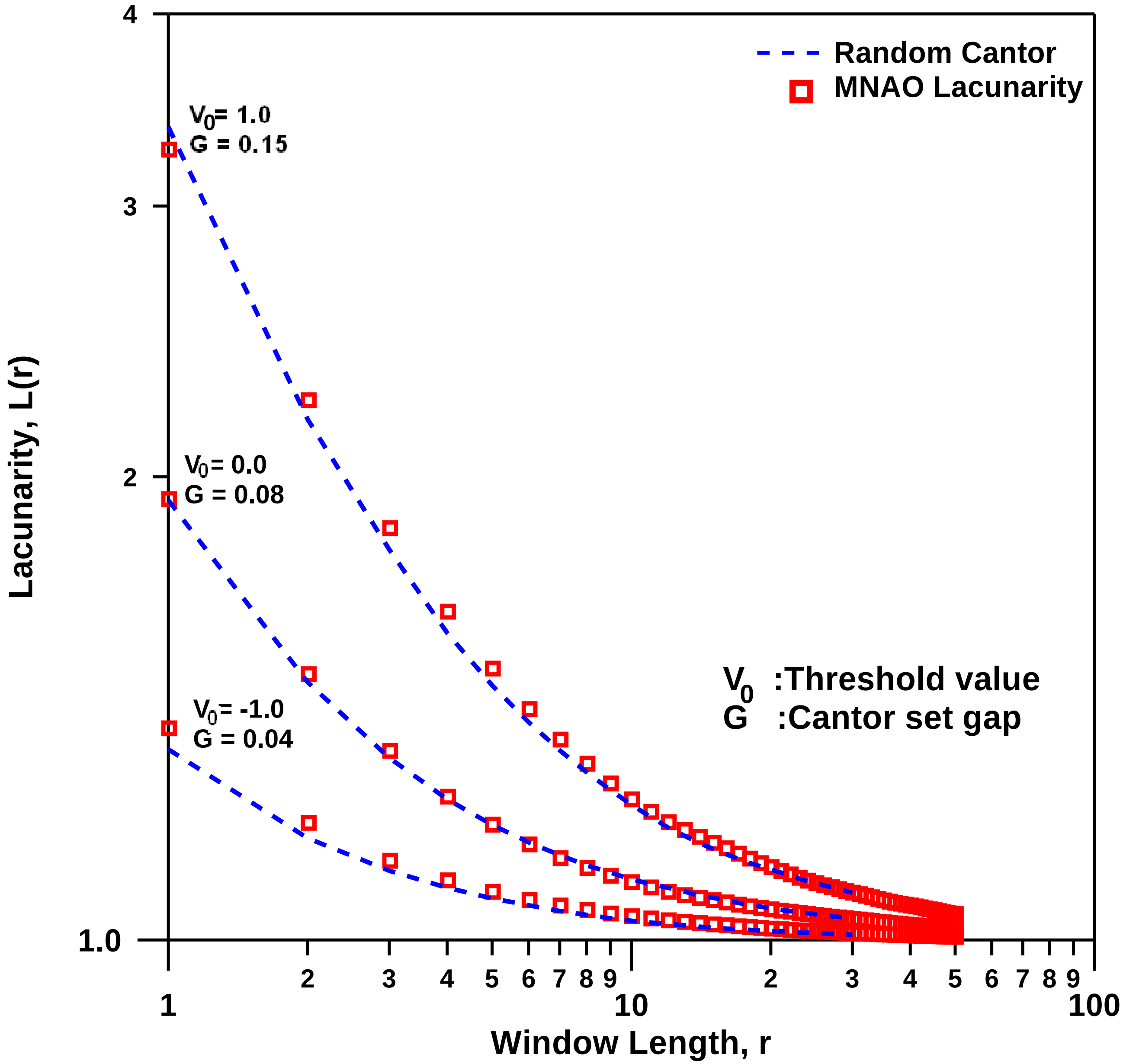
CANTOR SET



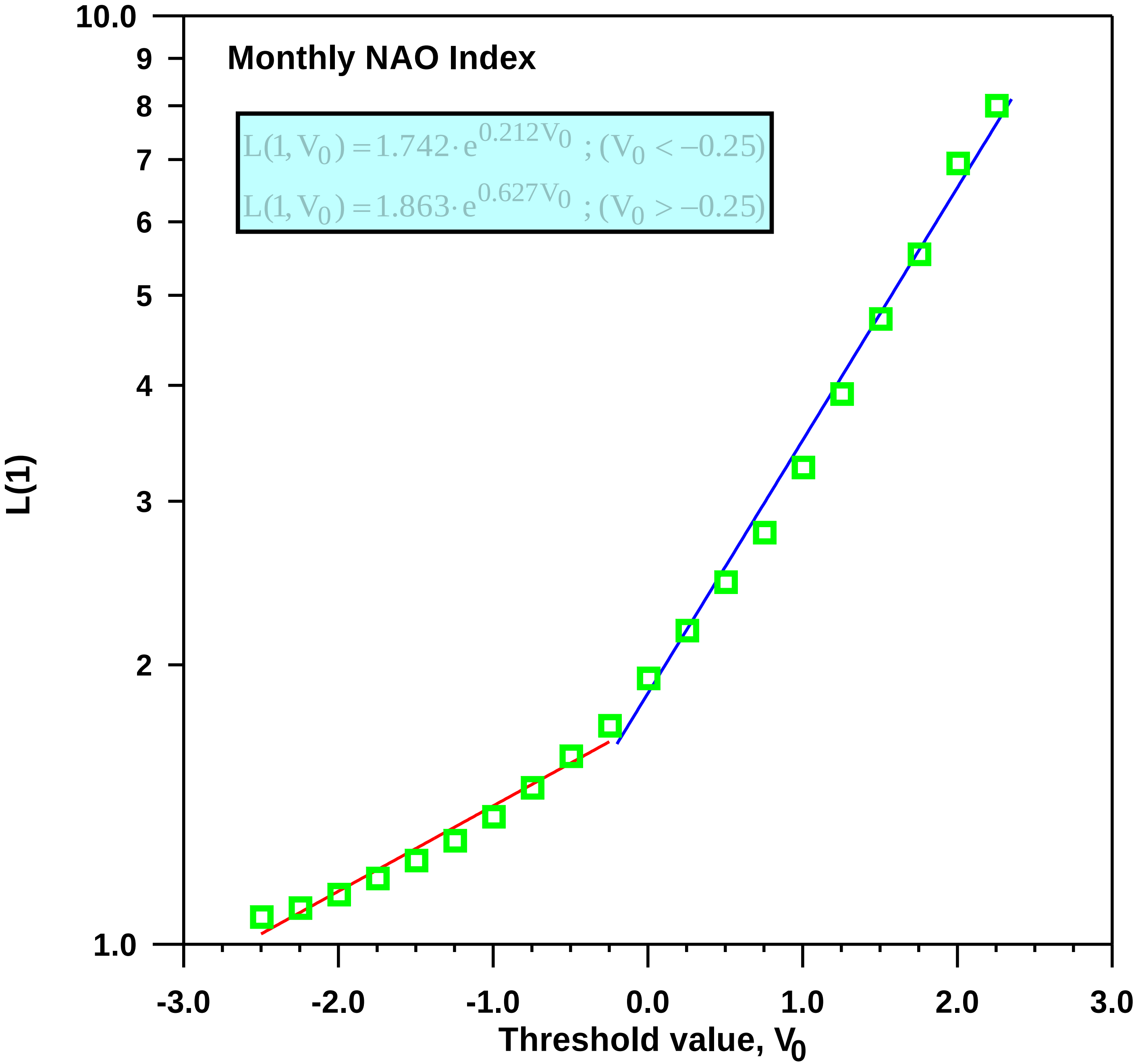
$$N = 2\,,\quad r = 1/3\,,\quad D = -\frac{\log(N)}{\log(r)} = -\frac{\log(N)}{\log\{(1-G)/2\}} = 0.631$$

$$G = 1/3$$

→ Random Cantor set: sèrie de Cantor desordenada aleatòriament



Random Cantor
MNAO Lacunarity
V0= 1.0
G = 0.15
V0= 0.0
G = 0.08
V0= -1.0
G = 0.04
V0 :Threshold value
G :Cantor set gap
Lacunarity, L(r)
Window Length, r
4
3
2
1.0
1
10
100


Monthly NAO Index
$L(1, V_0) = 1.742 \cdot e^{0.212 V_0}$; $(V_0 < -0.25)$
$L(1, V_0) = 1.863 \cdot e^{0.627 V_0}$; $(V_0 > -0.25)$
L(1)
Threshold value, V_0
10.0
9
8
7
6
5
4
3
2
1.0
-3.0
-2.0
-1.0
0.0
1.0
2.0
3.0

2) ANÀLISI RESCALADA (exponent de HURST)

X_k : K$^{\text{èssim}}$ element de la sèrie $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$

$$X(j,\tau) = \sum_{i=1}^{j} \{<X_i> - X_\tau\} \quad ; \quad <X_m> = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} X_s$$

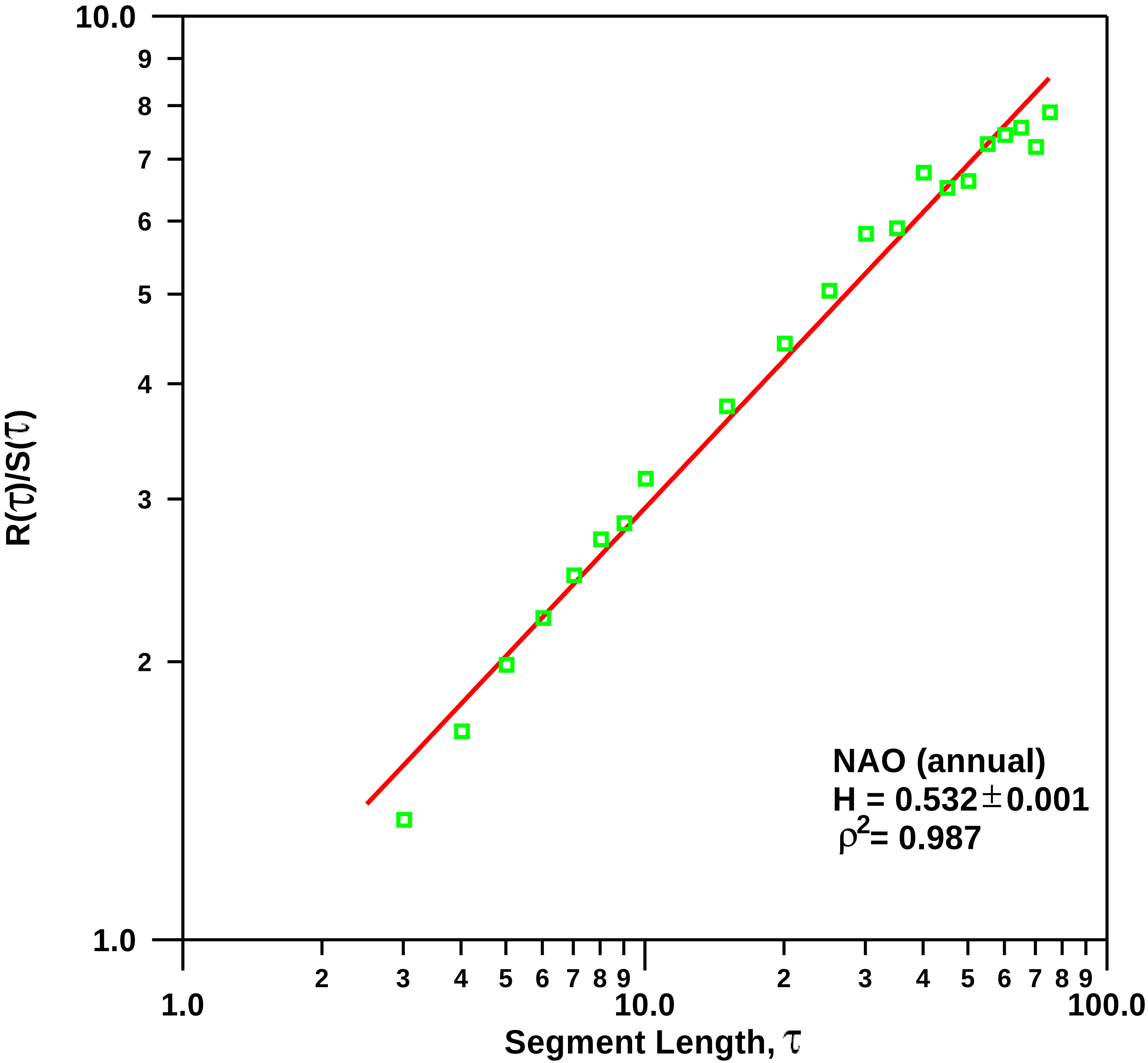
amb finestres mòbils de diferent longitud τ

$$R(\tau) = \max_{1\le j\le\tau}\{X(j,\tau)\} - \min_{1\le j\le\tau}\{X(j,\tau)\}$$

$$S(\tau) = \left\{\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{\tau}[X(j,\tau) - \overline{X}_j]^2\right\}^{1/2}$$

$$R(\tau)/S(\tau) \propto \tau^H$$

H < 0.5: antipersistència
H = 0.5: aleatorietat total
H > 0.5: persistència



10.0
9
8
7
6
5
4
3
2
1.0
R(τ)/S(τ)
NAO (annual)
H = 0.532 ± 0.001
ρ2= 0.987
2
3
4
5
6
7
8
9
1.0
10.0
100.0
Segment Length, τ

3) TEOREMA DE RECONSTRUCCIÓ

- Vector reconstruït de dimensió m

$$Z_k = (X_{k+1}, \ldots, X_{k+m-1}, X_{k+m})$$

3.1) Integral de correlació

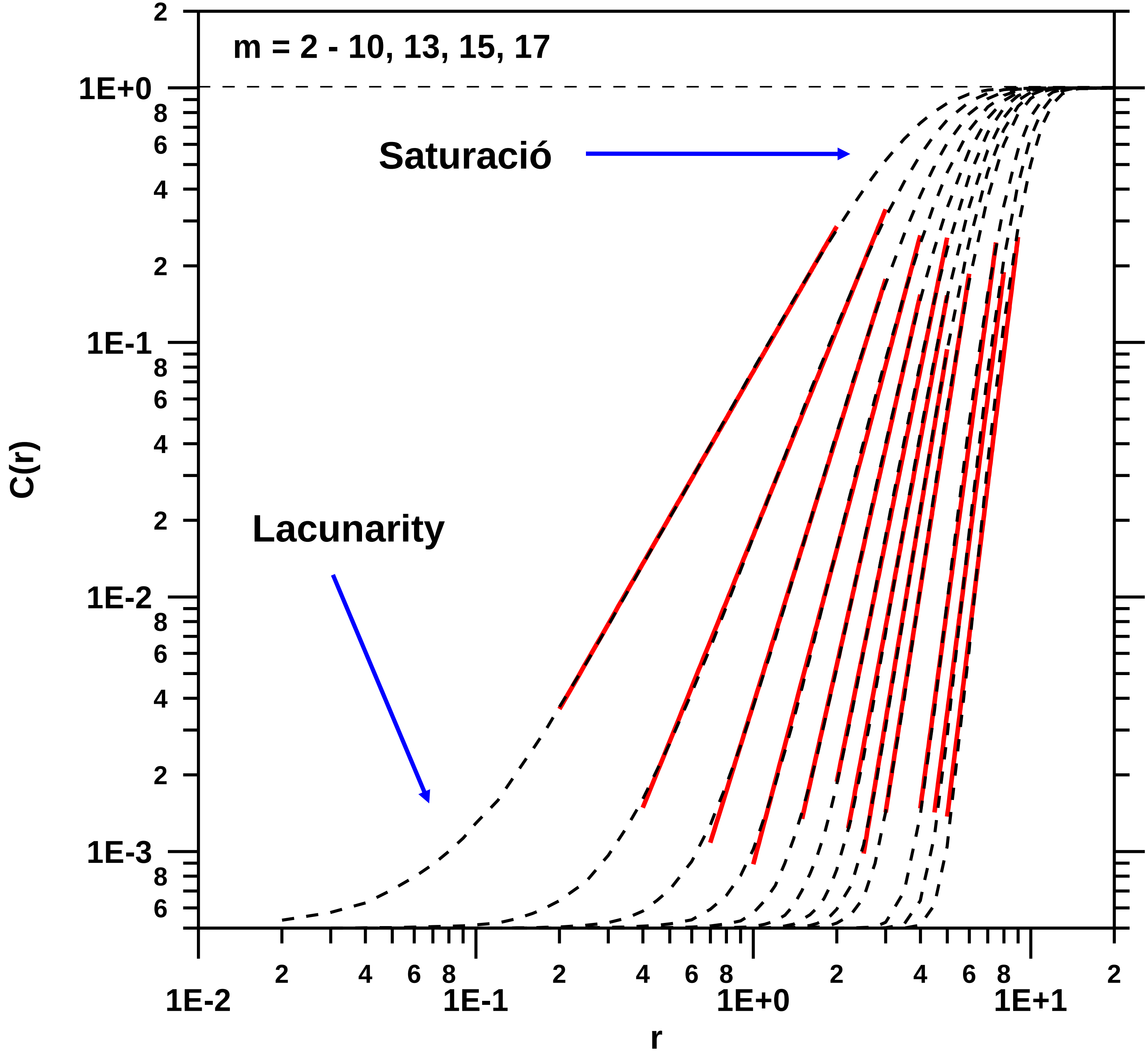
$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j}^{N} H\left\{ r - \left| Z_i - Z_j \right| \right\}$$

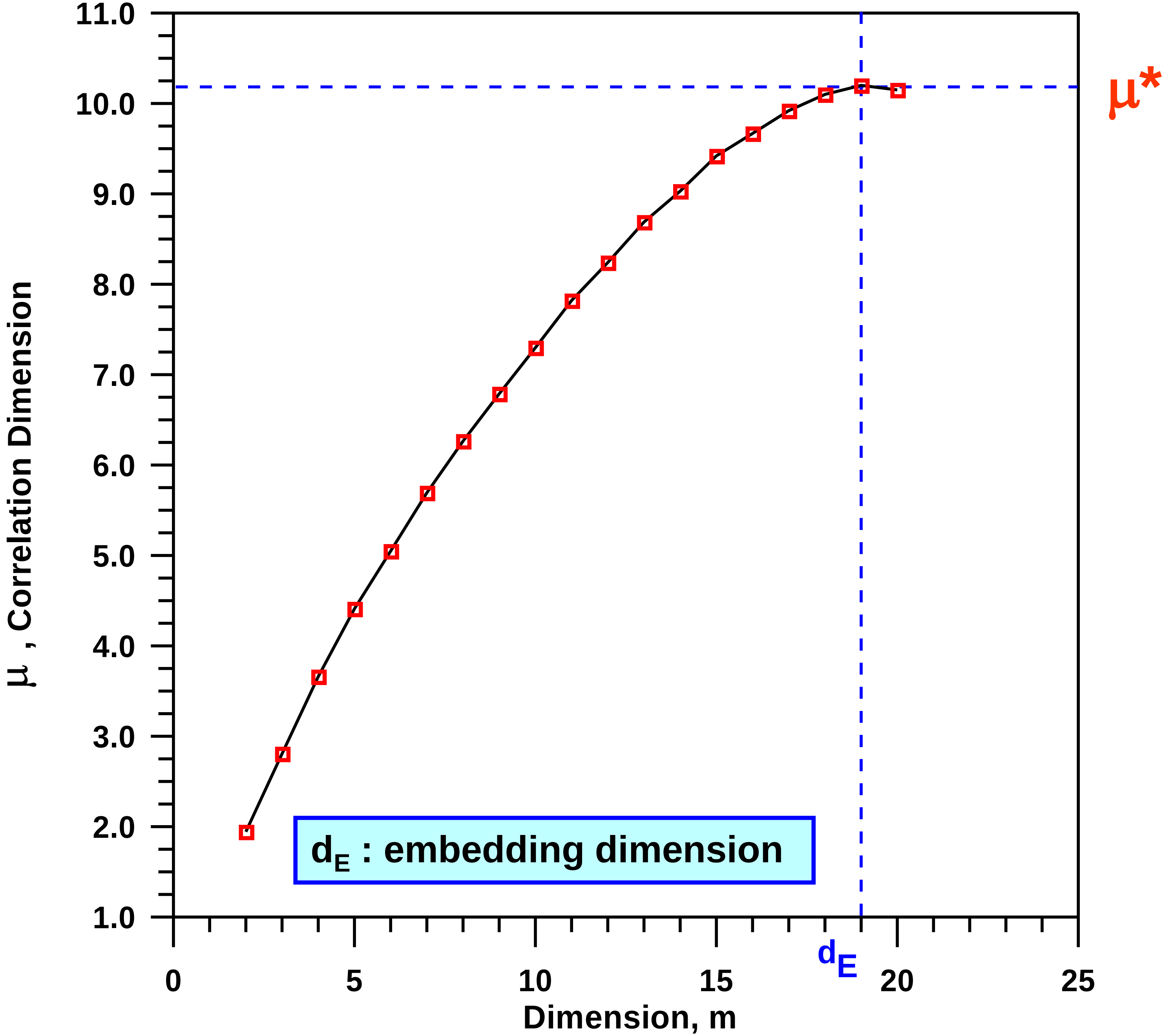
r : diferents distàncies a l'espai m-dimensional

- Dimensió de Correlació i entropia de Kolmogorov

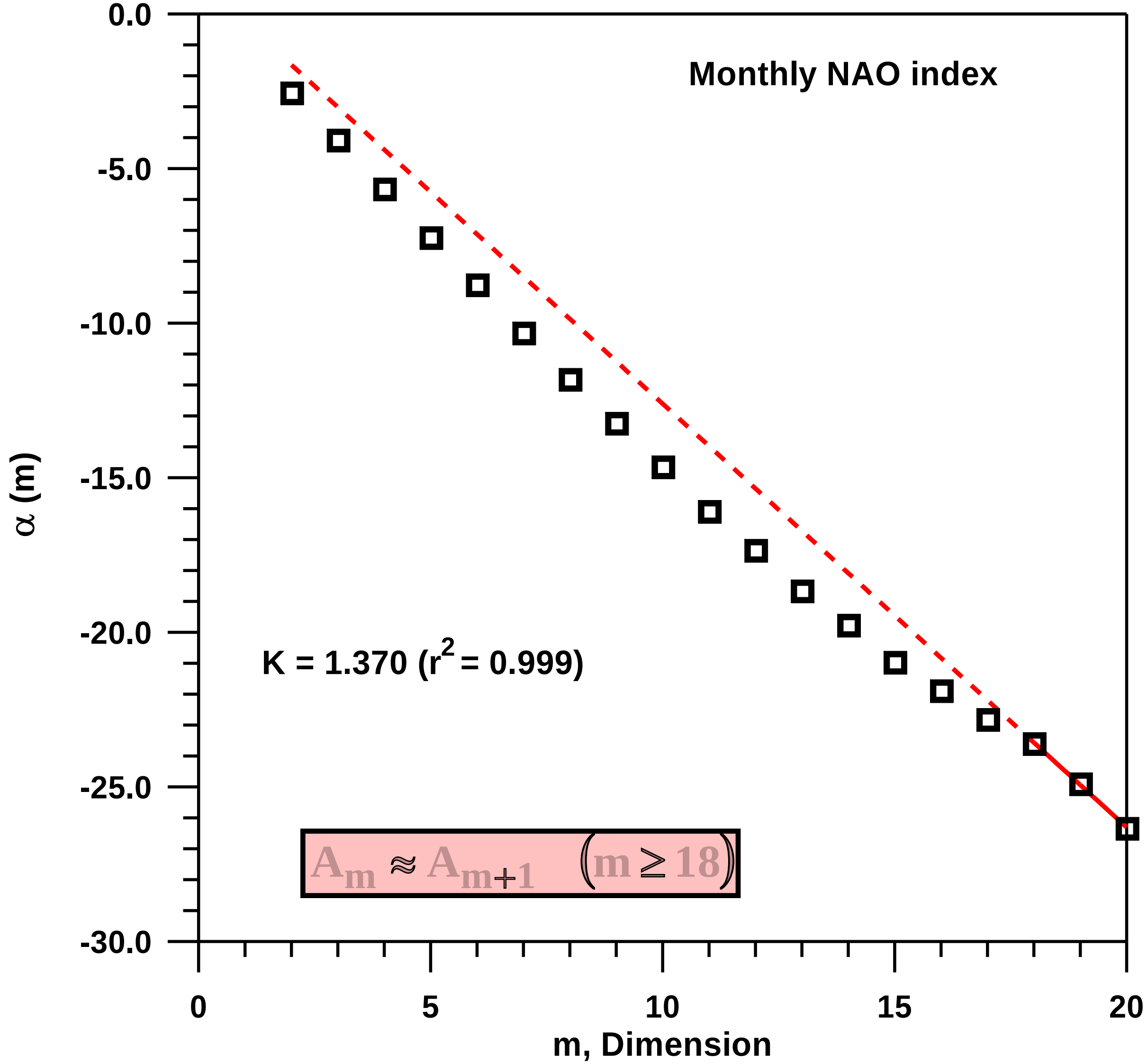
$$\mathbf{C(r) = A_m r^{\mu(m)} e^{-m\kappa}}$$

$$\log\{C(r)\} = \log\{A_m\} - m\kappa + \mu(m)\log(r) = \alpha(m) + \mu(m)\log(r)$$


m = 2 - 10, 13, 15, 17
Saturació
Lacunarity
C(r)
r
1E+0
1E-1
1E-2
1E-3
1E-2
1E-1
1E+0
1E+1



11.0
10.0
9.0
8.0
7.0
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
μ , Correlation Dimension
μ*
d_E : embedding dimension
d_E
0
5
10
15
20
25
Dimension, m



$$\log\{C(r)\} = \log\{A_m\} - m\kappa + \mu(m)\log(r) = \alpha(m) + \mu(m)\log(r)$$

3.2) Inestabilitat Predictiva

Exponents de Lyapunov

$$\lambda_{max} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j} \ln \left\| \frac{\delta Z(m)_j}{\delta Z(m)_0} \right\|$$

Incertesa després de j "steps" segons incertesa inicial

Generalització del càlcul a dimensió m:

$\{ \lambda_{max} (\lambda_1), \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m \}$

$$\left\| \frac{\delta Z(m)_j}{\delta Z(m)_0} \right\|$$ **Segons (*)**

$\lambda_j > 0$ [inestabilitat predictiva]

(*) Stoop and Meier. (1988), J. Opt. Soc. Am. (B)
Eckmann et al. (1986), Phys. Rev. (A)

3.2.1 Algoritme de càlcul dels exponents de LYAPUNOV

$$Z_k = f(Z_{K-1}) = \ldots.. = f^K(Z_0)$$

$$\left\| f^K(Z_0) - f^K(Z_0 + V_0 \cdot \varepsilon) \right\| = \left\| \left\{ \prod_{i=0}^{K-1} Df(Z_i) \right\} V_0 \cdot \varepsilon \right\| + O(\varepsilon^2)$$

Recurrència

1) Base ortonormal $\mathrm{V}_1^0, \ldots., \mathrm{V}_\mathrm{N}^0$

2) $\mathrm{W}_\mathrm{n}^\mathrm{j} = \mathrm{Df}(\mathrm{Z}_{\mathrm{j}-1})\mathrm{V}_\mathrm{n}^{\mathrm{j}-1}$; $\mathrm{n} = 1, \ldots, \mathrm{N}$ (Dimensió de reconstrucció)

3) $\mathrm{d}_1^\mathrm{j} = \left\| \mathrm{W}_1^\mathrm{j} \right\|$; $\mathrm{d}_\mathrm{m}^\mathrm{j} = \left\| \omega_\mathrm{m}^\mathrm{j} \right\|$; $\mathrm{m} = 2, \ldots, \mathrm{N}$

4) $\omega_\mathrm{m}^\mathrm{j} = \mathrm{W}_\mathrm{m}^\mathrm{j} - \sum_{\ell=1}^{\mathrm{m}-1} \left(\mathrm{V}_\ell^\mathrm{j}, \mathrm{W}_\mathrm{m}^\mathrm{j} \right) \mathrm{V}_\ell^\mathrm{j}$; on $\mathrm{V}_\mathrm{n}^\mathrm{j} = \omega_\mathrm{n}^\mathrm{j} / \mathrm{d}_\mathrm{n}^\mathrm{j}$

5) Tornar a 2)

$$\lambda_\mathrm{n} = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\ell} \ln(\mathrm{d}_\mathrm{n}^\mathrm{j})$$

CAS DISCRET

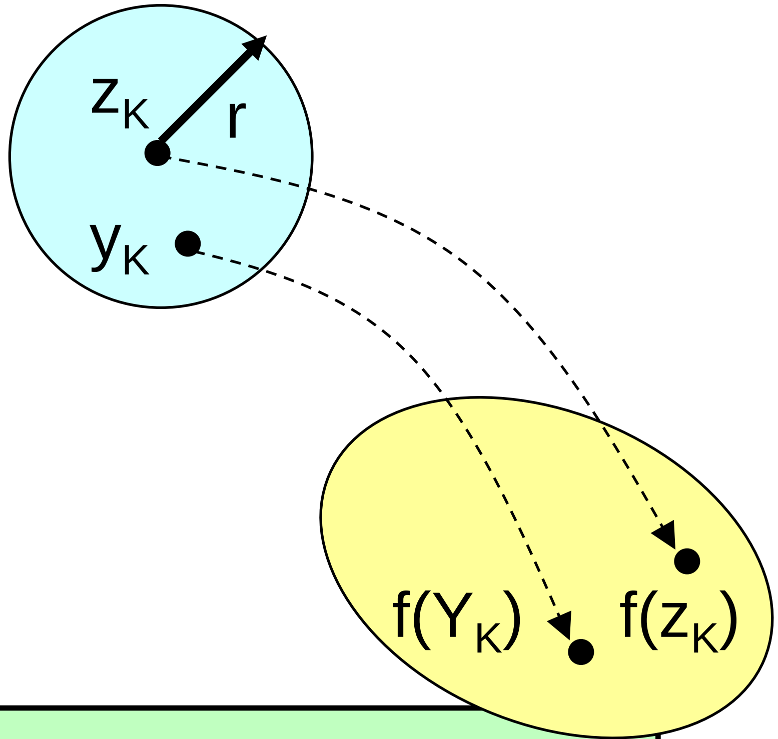
$$Z_k = \{X_k, \ldots\ldots\ldots, X_{k+d_E-1}\}$$

$$f(Z_k) = \{X_{k+1}, \ldots\ldots\ldots, X_{k+d_E}\}$$

$$Df(Z_k) = A(Z_k)\,B^{-1}(Z_k)$$

$$\Pi^{K+1} = f(Y_K) - f(Z_K)$$

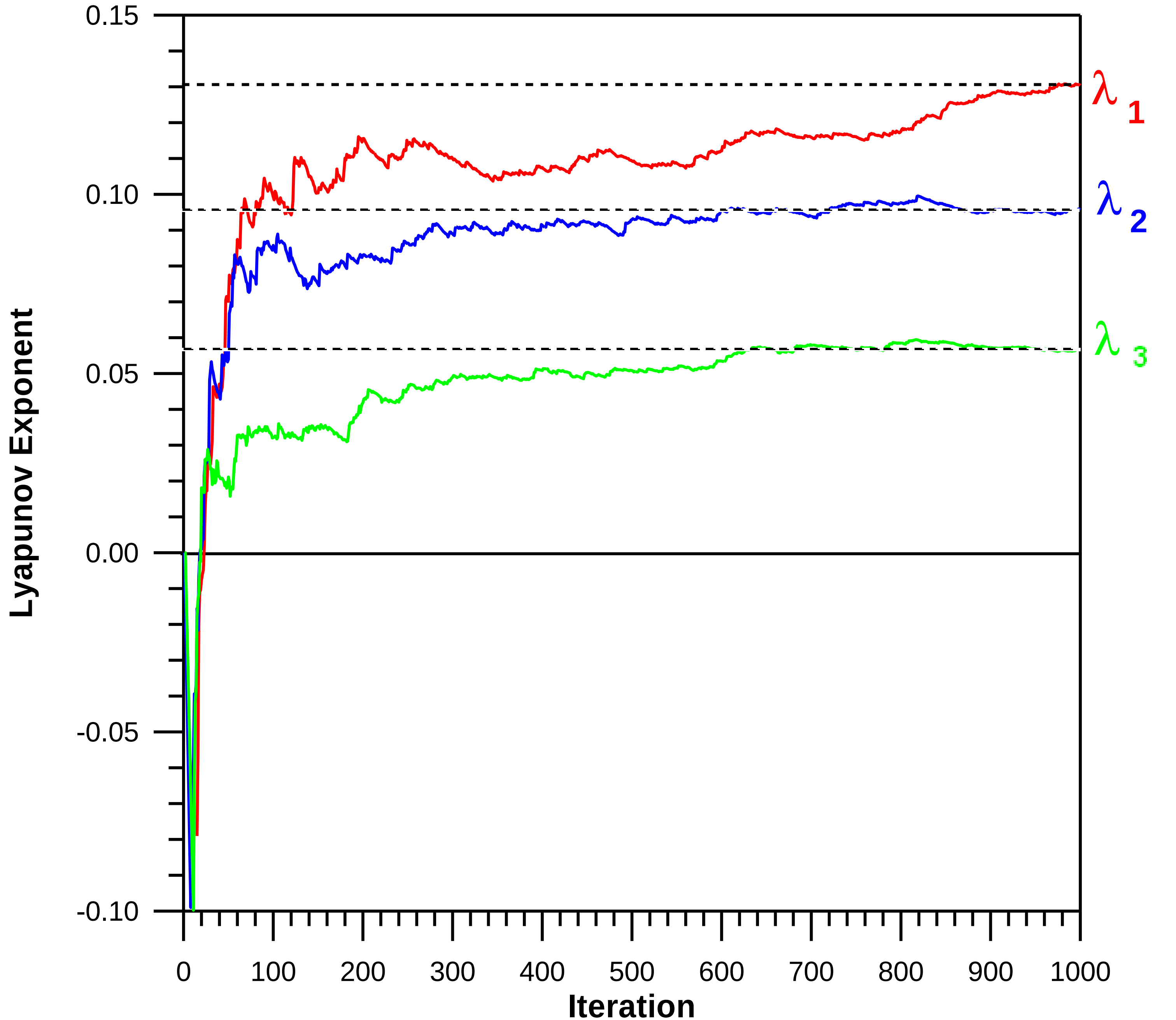
$$\Lambda^K = Y_K - Z_K$$



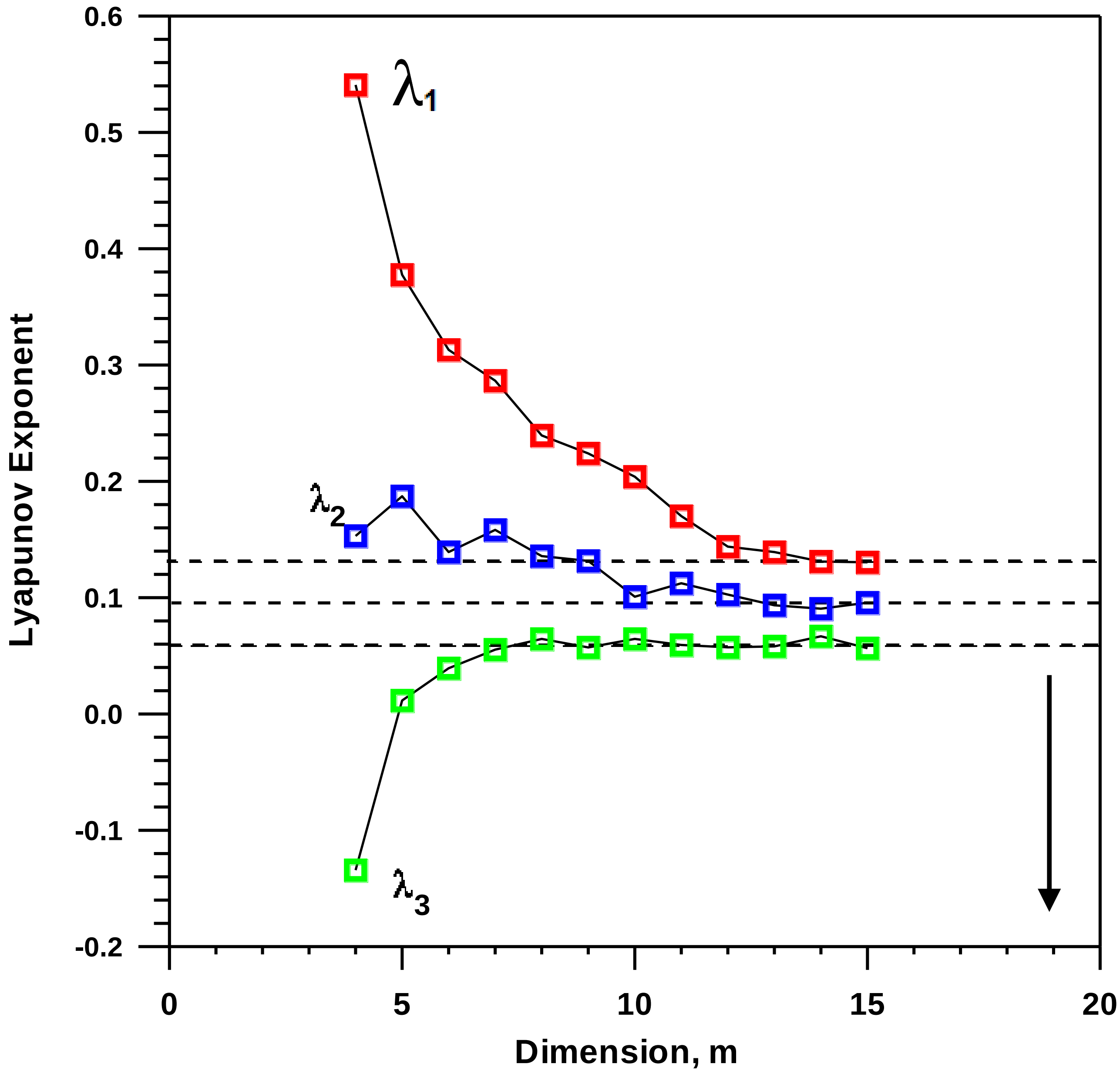
$$A(Z_k)_{\alpha\beta} = \sum_{m=1}^{M} \Pi^{K+1}_{m\alpha} \Lambda^{K}_{m\beta} \quad ; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, d_E$$

$$B(Z_k)_{\alpha\beta} = \sum_{m=1}^{M} \Lambda^{K}_{m\alpha} \Lambda^{K}_{m\beta} \; ; M > d_E \quad ; \; M = \min\{2d_E, d_E + 4\}$$

Eckmann et al. (1986), Phys. Rev. (A)



0.15
0.10
0.05
0.00
-0.05
-0.10
Lyapunov Exponent
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
Iteration
λ_1
λ_2
λ_3



0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
-0.1
-0.2
0
5
10
15
20
Lyapunov Exponent
Dimension, m
λ_1
λ_2
λ_3

	H	d_E	μ	κ	λ_1
monthly NAO index	**≈ 0.5**	**≥ 19[a]**	**10.1**	**1.37**	**0.13**
[1]**Martínez et al. (2007)**	0.5 - 0.8	≈ 15[b]	----	----	0.15-0.35
[2]**Martínez et al. (2007)**	0.3 – 0.8	≈ 15[b]	----	----	0.15-0.40
[3]**Lana et al. (2005)**	0.6 – 0.8	10-13[a]	2.0-6.0	0.17 – 0.33	0.20-0.40
[4]**Correig et al. (1997)**	≈ 0.7	≥ 10[a]	2.2	0.40	0.63

(a) Segons valor estcionari de μ **(b) Segons valor estacionari de λ_1**

1) Règim de precipitació diària:
Martínez, Lana, Burgueño, Serra. (2007). Nonlinear Processes in Geophysics
2) Distribució de "dry spells":
Martínez, Lana, Burgueño, Serra. (2007). Nonlinear Processes in Geophysics
3) Distàncies i temps d'espera entre sismes consecutius:
Lana, Martínez, Posadas, Canas. (2005). Nonlinear Processes in Geophysics
4) Temps d'espera entre sismes consecutius:
Correig, Urquizú, Vila, Martí. (1997). Pure and Applied Geophysics.

Index NAO:

Sistema dinàmic, dissipatiu i caòtic que descriu trajectòries aperiòdiques i assimptòticament estables al voltant de posicions en l'espai m-dimensional anomenades "strange attractors". A més, les prediccions resulten ser sensibles a les condicions inicials

MODELS PREDICTIUS

1) Deterministes (<u>desaconsellables</u>):

- **Exponent de Hurst i embedding dimension.**
  (marcada aleatorietat)
- **Dimensió de correlació elevada.**
  (gran nombre d'equacions no lineals)
- **Entropia de Kolmogorov elevada.**
  (forta pèrdua de memòria)
- **Exponents de Lyapunov positius**
  (Inestabilitat predictiva)

2) Estocàstics:

- **Random Walk**
- **Brownià**
- **Markovià (Red Noise)**
- **Processos Autoregressius**

⟶ Alternatives:

- **Generació amb models de Cantor**
- **Altres definicions similars a NAO**