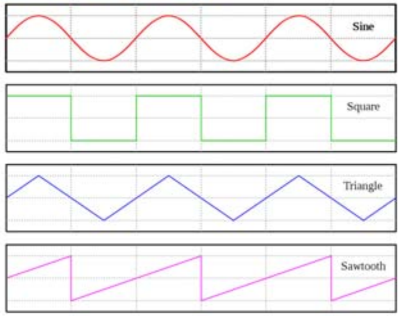
Funcions Harmòniques Simples (FHS):

$A\cos(\omega t+\phi)$ i $A\sin(\omega t+\theta)$



Funció Periòdica (FP):

$F(t)$ tq $F(t+T)=F(t)$

període $\equiv T = 1/f = 2\pi/\omega_0$

freqüència angular $\equiv \omega_0 = 2\pi/T$

Teorema de Fourier:

Tota FP es pot expressar com la suma de FHS (**Sèrie de Fourier**)

$$\boxed{\begin{aligned} F(t) &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)] \\ &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(n\omega_0 t+\phi_n) \end{aligned}}$$

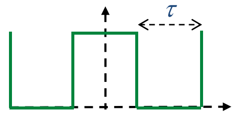
$$a_n = \tfrac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad ; \quad b_n = \tfrac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad ; \quad \phi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Cada terme (amb $\omega = n\omega_0$) s'anomena **harmònic**

$f_n = n\omega_0/(2\pi) = n/T$ és la freqüència (en Hz) de l'harmònic n-èssim

- **Sèrie d'una ona quadrada** amb $T = 2\tau = 2\pi/\omega_0$



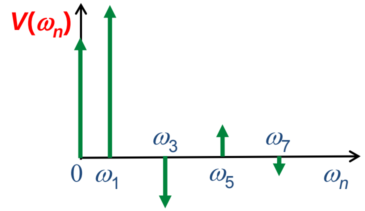
$$V(t) = \frac{V}{2} + \frac{2V}{\pi}\cos(\omega_0 t) + \frac{2V}{3\pi}\cos(3\omega_0 t+\pi) + \frac{2V}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) + \frac{2V}{7\pi}\cos(7\omega_0 t+\pi) + \ldots$$
$$= \frac{V}{2} + \frac{2V}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2V}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2V}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2V}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \ldots$$

[PhET Interactive Simulations (University of Colorado): Fourier: Making Waves](http://phet.colorado.edu/en/simulation/fourier)
(http://phet.colorado.edu/en/simulation/fourier)

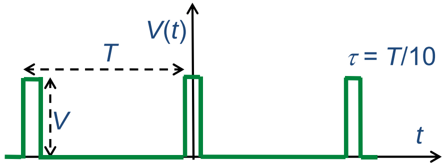
Espectre: $V(\omega_n=n\omega_0)$ $\equiv$ Amplituds en funció de $\omega_n = n\omega_0 = n(2\pi/T)$

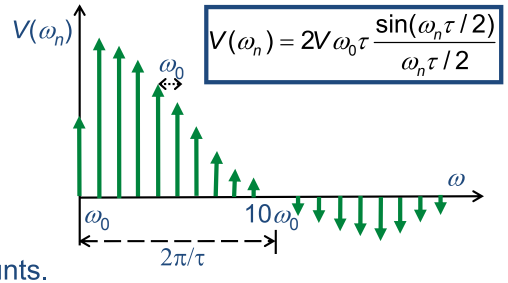
- **Espectre d'una ona quadrada** amb ω_0

$V_0 = V_0(\omega=0\omega_0) = V/2$
$V_n = 0$ per a $n\neq 0$ parell
$V_n = \pm 2V/(n\pi)$ per a n imparell



- **Tren de polsos quadrats** de durada τ i període $T = 10\tau = 2\pi/\omega_0$:

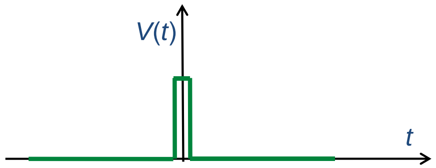


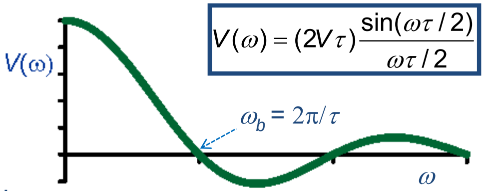


$$\boxed{V(\omega_n) = 2V\omega_0\tau\frac{\sin(\omega_n\tau/2)}{\omega_n\tau/2}}$$

Quan més gran és T/τ,
més petit és $\omega_0 = \Delta\omega = 2\pi/T$,
hi ha més harmònics, i estan més junts.

- **Pols quadrat individual**, de durada τ ($T\to\infty \Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T \to 0$)

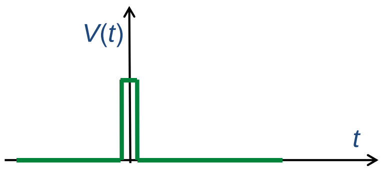




$$\boxed{V(\omega) = (2V\tau)\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}}$$

L'espectre discret passa a ser continu

Ampla de banda $\boxed{f_b = \frac{1}{\tau}}$

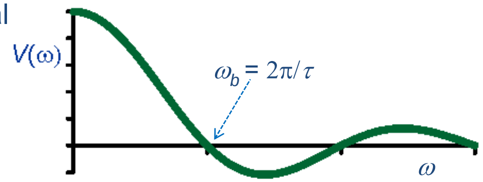


- Interval de freqüències necessari per reproduir acceptablement un pols quadrat
- Freqüència $f_b = \omega_b/2\pi$ per a la qual

$$V(\omega_b) = (2V\tau)\frac{\sin(\omega_b\tau/2)}{\omega_b\tau/2} = 0$$

per primera vegada

$$f_b = \omega_b/2\pi = (2\pi/\tau)/2\pi = 1/\tau$$



- Com **més curt** és un pols, **més gran ha de ser l'ampla de banda** i es necessiten **més harmònics** per reproduir acceptablement el senyal

Velocitat de transmissió de la informació (v)

- Nombre de bits per segon (**bauds**)
- Si la durada d'un bit és $T_{bit} = 2\tau$
- Per augmentar v cal disminuir τ i augmentar f_b

$$\boxed{v = \frac{1}{T_{bit}} = \frac{1}{2\tau} = \frac{f_b}{2}}$$