ANÀLISI DE FOURIER I MESURES EN CORRENT CONTINU

Abans d'anar al laboratori

1 - Estudieu l'apartat 1.1 sobre el fonament teòric de la primera part d'aquesta pràctica.

2 - Resoleu els problemes plantejats als apartats 1.3 i 2.1 La resolució l'haureu de lliurar al professor del laboratori a l'inici de la pràctica.

3 - Llegiu els apartats 1.4 i 2.2 sobre els procediments de mesura.

4 - Mireu els apèndixs B i C sobre el funcionament del polímetre i l'oscil·loscopi.

5 - Estudieu l'apartat 1.1 de la pràctica "Funcionament de l'oscil·loscopi i el polímetre".

6 - Estudieu l'apartat 6, sobre la regressió lineal, del document "Tractament de dades experimentals".

Objectius

a) Iniciar-se en el maneig d'un **generador de funcions, una font de tensió, un oscil·loscopi i un polímetre**.

b) Entendre la **descomposició** de **Fourier d'un senyal quadrat periòdic**.

c) Aprendre a **connectar** un **voltímetre** i un **amperímetre**.

d) Fer una **regressió lineal** amb l'Excel.

1 Anàlisi de Fourier

1.1 Fonament teòric

El **teorema de Fourier** afirma que **qualsevol funció periòdica** *V(t)* de forma arbitrària de **freqüència *f*** es pot expressar com una **sèrie infinita de funcions harmòniques** de **freqüències que són múltiples enters de *f*:**

$$V(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi n f t)$$

Els coeficients A_n i B_n es calculen a partir d'integrals de la pròpia funció *V(t)*:

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T V(t)\cos(2\pi n f t)dt \qquad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T V(t)\sin(2\pi n f t)dt$$

La **funció periòdica quadrada, d'amplitud V_0, període *T* i freqüència $f = 1/T$**, que es mostra a la figura 1, està definida per l'expressió:

$$V(t) = \begin{cases} V_0 & (0 < t < T/2) \\ -V_0 & (T/2 < t < T) \end{cases}$$

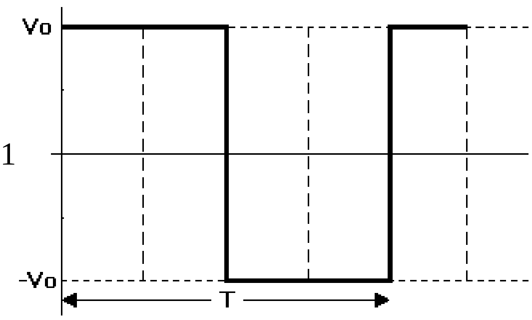

Figura 1

Es pot demostrar que per aquesta funció els coeficients A_n i els B_n amb valors parells de n són nuls; mentre que els B_n amb valors senars de n valen $4V_0/n\pi$. Per tant, la sèrie de Fourier és:

$$V(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n f t)}{n} =$$

$$= \frac{4V_0}{\pi} \left\{ \frac{\sin(1 \cdot 2\pi \mathrm{f} t)}{1} + \frac{\sin(3 \cdot 2\pi \mathrm{f} t)}{3} + \frac{\sin(5 \cdot 2\pi \mathrm{f} t)}{5} + \cdots \right\}$$

Així, doncs, un **senyal quadrat** de freqüència ***f*** s'expressa com la **suma de senyals sinusoïdals o harmònics** de freqüències ***f, 3f, 5f,***..., essent la contribució o **amplitud** B_n de cada terme de la sèrie o harmònic $\boldsymbol{4V_0/\pi}$, $\boldsymbol{4V_0/3\pi}$, $\boldsymbol{4V_0/5\pi}$,...

1.2 Selector de freqüències d'ultrasons

Els ultrasons són **ones acústiques** de freqüències **superiors a les màximes audibles** (f > 20 kHz). Per generar-les i detectar-les s'utilitzen transductors electroacústics que, en l'etapa d'emissió, converteixen energia elèctrica en acústica i en la de detecció realitzen l'operació inversa. La majoria d'ells es basen en el fenomen de la **piezoelectricitat**, que és la capacitat de certs cristalls de generar una diferència de potencial quan se'ls sotmet a una deformació mecànica. L'efecte és reversible i, per tant, els materials piezoelèctrics s'expandeixen o es contreuen quan se'ls aplica una diferència de potencial. Els ultrasons tenen moltes aplicacions industrials, entre les que podem destacar: la mesura de distàncies, la detecció d'objectes, els sonars dels vaixells i el diagnòstic mèdic per ecografia.

Els emissors i receptors d'ultrasons, que utilitzarem en aquesta pràctica, són **sistemes ressonants**. Això vol dir que, per una banda, els emissors emeten ones acústiques quan se'ls hi aplica una tensió alterna de freqüència igual a de ressonància f_r, que en el nostre cas és d'uns **40 kHz**. D'altra banda, als receptors s'indueixen diferències de potencial alternes quan sobre ells incideixen ones acústiques de freqüència igual a de ressonància f_r. Com s'indica a la figura 2, la **corba de ressonància** del sistema format per un **emissor i un receptor d'ultrasons és molt aguda.** Per aquest motiu es pot utilitzar com a **filtre o selector** de freqüències. En el nostre cas això voldrà dir que:

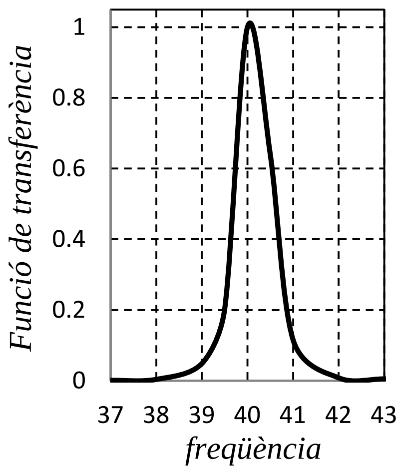

Figura 2

1) Si a l'**entrada** de l'emissor se li aplica un **senyal quadrat** de **freqüència** igual a la de ressonància $\boldsymbol{f_r}$, el sistema seleccionarà el primer harmònic, ja que els altres, al tenir freqüències $3f_r$, $5f_r$,... diferents a la de ressonància, seran eliminats. Per tant, a la **sortida** del receptor tindrem un **senyal sinusoïdal de freqüència** $\boldsymbol{f_r}$ amb l'**amplitud** corresponent a la del primer harmònic $\boldsymbol{4V_0/\pi}$.

2) Si a l'**entrada** de l'emissor se li aplica un **senyal quadrat de freqüència** igual a $\boldsymbol{f_r/3}$, el sistema seleccionarà el tercer harmònic, ja que els altres, al tenir freqüències $f_r/3$, $5f_r/3$,... diferents a la de ressonància, seran eliminats. Per tant, a

la **sortida** del receptor tindrem un **senyal sinusoïdal de freqüència f_r** amb l'**amplitud** corresponent al tercer harmònic $4V_0/3\pi$.

3) En el cas més general, si a l'**entrada** de l'emissor se li aplica un **senyal quadrat de freqüència igual a f_r/k**, el sistema seleccionarà l'harmònic d'ordre "*k*", ja que els altres, al tenir freqüències f_r/k, $3f_r/k$,... diferents a la de ressonància, seran eliminats. Per tant, a la **sortida** del receptor tindrem un **senyal sinusoïdal de freqüència f_r** amb l'amplitud corresponent al *k*-èsim harmònic $4V_0/k\pi$.

Així, doncs, pels primers harmònics tenim:

Freqüència del senyal quadrat a l'entrada	Freqüència del senyal sinusoïdal a la sortida	Amplitud del senyal a la sortida	Quocient entre les amplituds a la sortida referides al primer harmònic
f_r	f_r	$4V_0/\pi$	1
$f_r/3$	f_r	$4V_0/3\pi$	1/3
$f_r/5$	f_r	$4V_0/5\pi$	1/5
$f_r/7$	f_r	$4V_0/7\pi$	1/7
$f_r/9$	f_r	$4V_0/9\pi$	1/9
$f_r/11$	f_r	$4V_0/11\pi$	1/11

1.3 Exercici previ

A la pantalla d'un oscil·loscopi es visualitza el senyal que es mostra a la figura 3, que correspon al primer harmònic d'un senyal quadrat d'amplitud V_0. Si el coeficient de deflexió és de 2 V/div i la base de temps és de 5 μs/div, determineu:

1) Les tensions pic a pic V_{pp} d'aquest harmònic i les dels d'ordre 3 i 5.
2) L'amplitud V_0 del senyal quadrat original.
3) El període *T* del senyal i la seva freqüència *f*.

Tingueu en compte que cada divisió correspon a un quadrat dividit en 5 subdivisions.

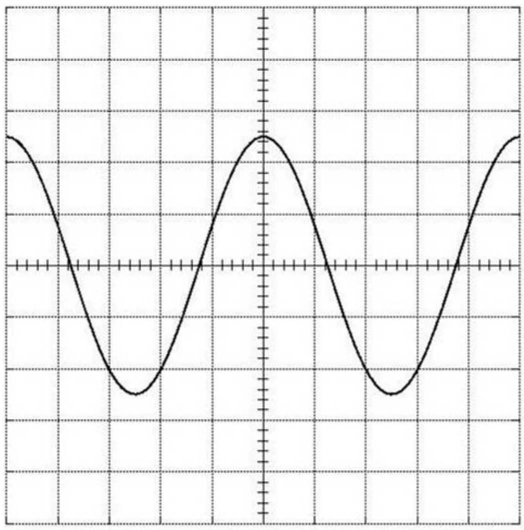

Figura 3

1.4 Procediment de mesura

1.4.1 Comproveu que al vostre lloc de treball teniu:

- 1 cable BNC (acrònim de baioneta de Neill-Concelman)-BNC.
- 1 generador de funcions.
- 1 oscil·loscopi de doble canal.
- 1 emissor i 1 receptor d'ultrasons.

1.4.2 Determinació dels harmònics

1. Connecteu el cable BNC-BNC entre la sortida de 50 Ω del generador de funcions i l'entrada del canal I de l'oscil·loscopi. Poseu en marxa el generador de funcions i l'oscil·loscopi, seleccionant per aquest últim una base de temps de 5 μs/div i un

coeficient de deflexió de 5 V/div. Utilitzeu els controls del generador de funcions per aplicar un senyal **quadrat de 40 kHz** de freqüència, i amb el botó *amplitude*, ajusteu l'amplitud del senyal fins que a l'oscil·loscopi observeu una tensió pic a pic $\boldsymbol{V_{pp}}$**= 20 V**. **No modifiqueu l'amplitud** en tota la pràctica.

2. Traieu el cable BNC-BNC, connecteu **l'emissor al generador** de funcions, el **receptor al canal I de l'oscil·loscop**i i situeu l'emissor davant del receptor de manera que estiguin separats aproximadament **1 cm**.

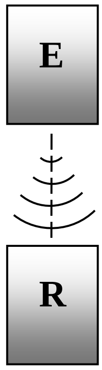

Figura 4

MOLT IMPORTANT !!! A fi de que les ones emeses pels vostres generadors d'ultrasons no afectin els resultats obtinguts pels companys, cal que orienteu els emissors de manera que emetin en direcció a vosaltres.

3. Com s'ha dit anteriorment, l'emissor i el receptor són sistemes ressonants, i només funcionen a l'entorn d'una determinada freqüència, que en el nostre cas és d'uns 40 kHz. Modifiqueu lleugerament la freqüència del generador de funcions fins que l'amplitud del senyal a l'oscil·loscopi sigui màxima. Aquesta serà la **freqüència de ressonància** $\boldsymbol{f_r}$. Anoteu el valor que indica la pantalla del generador de funcions i determineu la tensió pic a pic $\boldsymbol{V_{pp}(1)}$. Cal dir que, com el sistema ha eliminat totes les freqüències menys la de ressonància, a **l'oscil·loscopi** observareu un **senyal sinusoïdal** de freqüència $\boldsymbol{f_r}$. És a dir, el sistema ha seleccionat el **primer harmònic** d'un **senyal quadrat de freqüència** $\boldsymbol{f_r}$. **Mesureu amb l'oscil·loscopi el període** $\boldsymbol{T_{osc}}$ del senyal.

4. **Reduïu la freqüència** del generador de funcions fins un valor proper a $\boldsymbol{f_r/3}$ de manera que a l'oscil·loscopi veieu que el **senyal torna a ser màxim**. Ara el sistema ha seleccionat el **tercer harmònic** d'un **senyal quadrat de freqüència** $\boldsymbol{f_r/3}$. Per tenir més precisió convé canviar el coeficient de deflexió del canal I (per exemple a 2 V/div). Apunteu els valors de la freqüència, que indica la pantalla del generador de funcions, i determineu la tensió pic a pic $\boldsymbol{V_{pp}(3)}$ per aquest nou harmònic.

5. **Repetiu el procés anterior pels altres harmònics** que s'especifiquen a la taula del full de dades. Per cada cas aneu canviant el coeficient de deflexió a fi de mesurar la tensió pic a pic $\boldsymbol{V_{pp}(k)}$ amb la màxima precisió possible per cada *k*-harmònic. Ara el sistema anirà seleccionant el ***k*-èsim harmònic** d'un **senyal quadrat de freqüència** $\boldsymbol{f_r/k}$.

6. Per cada cas normalitzeu el valor de la tensió pic a pic respecte el valor obtingut pel primer harmònic. És a dir, calculeu $\boldsymbol{V_{pp}(k)/V_{pp}(1)}$.

7. **Compareu** els resultats **mesurats** de les **freqüències** i els valors $\boldsymbol{V_{pp}(k)/V_{pp}(1)}$ amb la **predicció teòrica** pels diferents harmònics.

2 Mesures en corrent continu

2.1 Exercici previ

A partir de les fórmules per calcular la resistència equivalent de les associacions de resistències en sèrie i en paral·lel, calculeu el valor teòric de la resistència equivalent R_{exe} del circuit de la figura 5. Determineu també el valor de les intensitats (I_1,...,I_5) i les caigudes de tensió (V_1,...,V_5) de totes les resistències del circuit quan ε = 10 V, suposant que la resistència interna de la font de tensió és nul·la. Quant val la intensitat total I ?

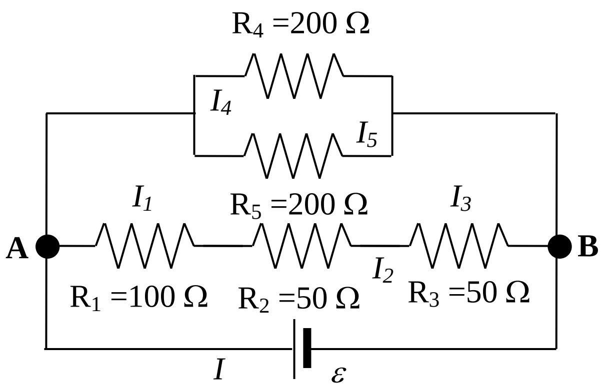

Figura 5

2.2 Procediment de mesura

2.2.1 Comproveu que al vostre lloc de treball hi ha:
- 1 tauler de connexions.
- 1 font de tensió contínua.
- 1 polímetre.
- Connectors en forma de pont.
- 5 cables de connexió banana-banana.
- 2 resistències de 200 Ω, 1 de 100 Ω i 2 de 50 Ω.

2.2.2 Mesura de la resistència equivalent

1. Comproveu que tots els **cables de connexió** estan en bon estat. Per fer-ho mesureu amb el polímetre, funcionant com a **ohmímetre** (vegeu l'Apèndix B), la resistència de cada cable connectant un born a l'entrada COM i l'altre a la VΩ. Si la resistència és mes gran que 1 Ω o varia quan sacsegem el cable, aquest està en mal estat i cal canviar-lo.

2. Mesureu el valor real de totes les **resistències** i, aplicant les regles d'associació de resistències, calculeu el valor teòric R_{teo} de la resistència equivalent del circuit de la figura 5. Compareu aquest valor amb el calculat a l'exercici previ R_{exe}.

3. Munteu el circuit de la figura 5 en el tauler de connexions (veure Apèndix A). Amb el polímetre, funcionant com a **ohmímetre** (veure Apèndix B), mesureu la resistència equivalent R_{ohm} entre els punts A i B. **Compareu** aquest resultat amb el predit teòricament R_{teo}.

4. Com s'indica a l'Apèndix B, connecteu un dels polímetres, funcionant com a **voltímetre** per a corrent continu, per mesurar la diferència de potencial V entre els punts A i B (amb el selector del PROMAX a la posició V $\overset{-}{\text{---}}$ o el del METRIX a la de V_{DC}). Connecteu l'altre polímetre, funcionant com a **amperímetre** per a corrent continu, per mesurar la intensitat I (en l'escala de fins a 400 mA en el model PROMAX, o a la posició de mA en el METRIX). **Recordeu que l'amperímetre es connecta en sèrie i el voltímetre en paral·lel.**

5. Connecteu la font de tensió contínua, poseu-la en marxa i aneu modificant el valor de ε de forma que la caiguda de tensió entre A i B (V), mesurada amb el voltímetre, varií de 1 a 10 V en intervals de 1 V. Els punts (I, V) obtinguts amb els dos polímetres han de verificar la relació lineal $V = RI$. Engegueu l'ordinador que teniu al lloc de treball, obriu

el programa Excel, i a les columnes A i B introduïu els valors de I i V mesurats anteriorment. Representeu gràficament V en funció de I, i feu una regressió lineal aplicant la metodologia que s'indica a l'apèndix D. **Determineu els valors de R_{reg} i el coeficient de correlació r** de l'ajust. Compareu aquest resultat amb els valors teòric R_{teo} i el mesurat amb l'ohmímetre R_{ohm}.

6. Apliqueu una tensió $\varepsilon = 10$ V i mesureu les **caigudes de tensió** ($V_1,...,V_5$) a **totes les resistències** i les **intensitats** ($I_1,...,I_5$). **Compareu** aquests resultats amb els predits teòricament al problema previ.

Anàlisi de Fourier i mesures en corrent continu

Anàlisi de Fourier

T_{osc} =

Harmònic	**Freqüència del senyal a l'entrada**		**Tensió pic a pic a la sortida $V_{pp}(k)$**	**Tensió pic a pic a la sortida normalitzada $V_{pp}(k)/V_{pp}(1)$**	
	Teoria	**Experiment**	**Experiment**	**Teoria**	**Experiment**
1	*40 kHz*			*1*	*1*
3	*13.33 kHz*			*1/3=0.33*	
5	*8 kHz*			*1/5=0.2*	
7	*5.71 kHz*			*1/7=0.14*	
9	*4.44 kHz*			*1/9=0.11*	
11	*3.64 kHz*			*1/11=0.09*	

Mesures en corrent continu

$R_1\ (100\,\Omega) =$	$R_2\ (50\,\Omega) =$
$R_3\ (50\,\Omega) =$	$R_4\ (200\,\Omega) =$
$R_5\ (200\,\Omega) =$	

R_{exe} =
R_{teo} =
R_{ohm} =
R_{reg} =
r =

I	***V***

	Experimental	***Teòric***
I_1		
I_2		
I_3		
I_4		
I_5		
I		
V_1		
V_2		
V_3		
V_4		
V_5		